

数学研究方法初探

王宜举

(曲阜师范大学运筹与管理学院, 山东日照, 276800)

引子: 中国田径队在短跑项目上获得突破, 几十年来一贯坚持训练“从难、从严、从实战出发”和“大训练量”的“三从一大”原则. 而这样做的结果不要说在世界级比赛中拿不到奖牌, 甚至在亚洲也难拿冠军. 2000年前后, 田径教练孙海平通过引入新的训练理念和方法, 在2004年的雅典奥运会上, 成功地将刘翔推上110米栏世界冠军的宝座, 让世界华人为之骄傲和自豪! 孙海平在年轻的时候曾当过8年的职业运动员. 尽管他那时训练刻苦, 却一直默默无闻. 当上教练员后, 他通过改变训练方式, 不但让刘翔在国际田径赛场上傲视群雄, 更没有让其成为昙花一现的流星, 这就是方法的功效. 那么, 我们从事数学研究有没有方法可循呢? 对此, 笔者曾有深深的困惑和思考. 我们根据自己多年从事数学研究的体会, 并结合一些数学大师从事数学研究的经验, 对数学研究的方法和策略进行了总结, 旨在引导开始从事数学科研究的研究生和青年教师尽快进入数学科研究之门.

人贵有自知之明, 这里总结的关于进行数学科研究的方法也不是放之四海而皆准的真理. 有兴趣的读者可以通过阅读华罗庚、王梓坤等数学大师有关科学研究方法的科普著作以获取更多关于数学科研究的诀窍, 并根据自身的特点找出适合自己的数学研究方法.

一、研究的特点、层次和境界

做研究是一个从 search 到 research 的反复过程. 对于不同层次的人, 人们对他做研究的要求也是不一样的. 根据现代中国教育的特点, 一般来讲, 做老师指定的有标准答案的问题是本科生做的事情, 做导师指定的没有答案的问题是硕士生做的事情, 而发现问题并寻求解决方法是一个博士生也是一个真正做科研的人应该做的事情. 所以, 对于一个从事数学研究的人来讲, 能提和会提问题是很关键的. 这也是为什么人们至今对希尔伯特一百多年前提出的二十三个数学问题津津乐道. 所以, 一个人要想真正做研究, 他就要学会从学知识到运用知识和创造知识的转变. 如果完成不了这个转变, 即使学习成绩再好, 也做不好研究.

关于做科研, 数学家华罗庚提出了四种境界: 第一种是照葫芦画瓢模仿, 实际上是所谓的做习题. 在研究的初级阶段做些习题是有必要的, 但不能一辈子老做习题. 第二种境界是套用现成的方法解决新问题. 这和第一种境界没有太大的区别, 但这样做时, 由于已有的方法并不完全适用于现在的问题, 还是有一些改进工作要做的. 而且, 在用老方法尝试解决新问题的时候可能会产生新的思路. 所以, 我们不要小瞧这样的工作. 著名数学家陈景润“ $1+2$ ”的研究成果就是利用挪威数学家布朗的“筛法”得到的. 但一个人做数学研究不能老局限在这种“攀亲”的境界里, 而要考虑针对新问题有无更有效的方法. 否则, 一发现新问题, 就老想着把它归结到以前碰到过的问题类里面, 这样会把自己的思维限制住, 从而影响我们的创造力, 这就引出了做科研的第三种境界: 用创新性的方法解决遇到的新问题. 这种境界完全有别于前两种境界, 是创造力提高的表现. 第四种境界是开辟新领域、新方向. 这种拓荒探宝性的工作, 其意义不言而喻. 它要求很高, 一般人也很难达到.

数学研究的成果大多以论文的形式出现. 与上述境界相对应, 数学研究成果相应地分为如下几个层次: 解决实际问题——这是科研成果的最高层次; 能解释某种现象——具有所谓的理论意义; 所得结果能自得其乐, 被人欣赏——这在老外称为“interesting”; 最后一类就是为完成某些科研任务而为写论文而写论文. 我国概率统计专家许宝禄从另一角度将数学研究工作者根据其研究成果分成以下层次: 一流的数学家不仅解决了不少著名的问题, 更重要的是开辟了许多重要的领域, 提供了新的方法, 他们的工作影响着几代人的研究方向;

二流的数学家能在一个方向或几个方向上有系统的工作，并产生一定的影响；三流的数学研究工作者仅仅解决了一些问题，并无系统的工作，在某种意义上将数学朝前推进了一点；最后一类数学研究工作者仅仅是写了一些文章，没有真正解决什么问题。其中，一流的数学家需要非凡的才能，不是一般人能够达到的。

二、科研的步骤

如何找 idea? 这是一个老生常谈的问题，要想写出好的数学研究论文，要掌握好几个环节。这里我们以做椅子为例从市场营销学的角度进行类比分析。如今家俱商场里椅子的款式是各式各样，而如果你也想做一些椅子到商场里去卖，那么怎样做才招人喜欢呢？我们可以从以下方面入手。

1. Background (Introduction)

如果你要制造椅子，首先你要弄清楚椅子的结构和当今流行的款式。如果你从没没见过椅子，很难想象你能做出招人喜欢的椅子来。只有你见了椅子，并观察其每一部分的结构和用途，再调研一下现在流行的款式，才有可能做出招人喜欢的椅子。做数学研究也是如此，它要求我们首先要把所研究的问题搞清楚，弄清楚问题的性质，目前的研究现状以及所面临的困难。而要弄清楚这些，就需要研究者深入到问题里面，弄清楚问题的来龙去脉。特别是要系统分析已有工作的思路和优缺点，从中摸索进一步发展的新途径。在这方面，一项有意义的工作是自己整理一篇含有自己见解、且具有评论性质的综合报告或文献评述。

2. Motivation(Why)

进行数学研究可以从市场营销学的角度进行分析：既然市场上已经有很多同类商品了，为什么还要生产我们的产品？我们的产品和别人的产品相比有什么优势？这种批判式的思考很重要！下面仍以生产椅子为例进行说明。在很早的时候，人们坐的是凳子；而在凳子上坐久了，需要放松一下腰，于是在凳子上安装了靠背，出现了椅子；而在椅子上坐久了，胳膊也需要找个地方放一放，于是扶手产生了，出现了圈椅。这提示我们在整理论文时要思考一下：我为什么要整理这篇论文？这种研究是新的吗？意义何在？

3. How (Main Results)

问题的症结找到以后，怎么解决？这里有两点，一是凭自己的基础、汗水和聪明才智进行创造性工作，直接建立解决问题的方法；二是借鉴别人的工作，也就是通过查阅文献，借鉴别人研究问题的方法而构建自己解决问题的方法，即所谓“它山之石，可以攻玉”。事实上，沙发就是木匠们受在床上铺有被子时坐起来舒坦的启发而发明的。

三、课题的选取

数学研究课题大多为理论型研究课题。课题选取合适与否，关键是一个人要具备分辨这个课题重要性的眼光，还要有自己有无能力解决这个难题的判断力。对于课题选取，王梓坤院士提示我们要坚持两点：坚持学科发展的最前沿，善于接触前沿问题，特别要选择前人未研究过但又有很大潜力和意义的新课题，力求创新；其次是攻克目前学科上的公认难题。下面，我们介绍课题选取的一些具体方法。

1. 利用类比方法建立新理论和新方法

不同的学科之间具有很多共性。因此，我们可以借鉴老问题的研究方法来解决新问题。这包含两个方面：

一是推广。比如，一些学者尝试把低维空间中的一些结论推广到高维空间，将有限维空间中的结论推广到无穷维空间。在这个过程中，有些结论可能不成立，这需要我们建立新结

论. 而且即使它成立, 证明过程或借用的研究工具也可能是完全不同的.

二是利用新问题和某一老问题的一些共性而借用解决老问题的方法提出解决新问题的方法. 这方面最典型的例子莫过于著名数学家欧拉对于倒数平方和级数的计算.

欧拉要求解的问题是: $\sum \frac{1}{n^2} = ?$.

对此问题, 欧拉通过将该级数与三角函数方程做类比得到了解决这个问题的办法. 他考虑如下 $2n$ 次代数方程:

$$b_0 - b_1 x^2 + b_2 x^4 - \dots + (-1)^n b_n x^{2n} = 0. \quad (1)$$

其中, $b_0 \neq 0, b_n \neq 0$.

显然, 上述方程有 $2n$ 个非零根, 我们记为 $\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \dots, \beta_n, -\beta_n$. 根据代数方程的有关理论, 如果两个代数方程的根相同, 而且常数项相同, 那么这两个代数方程所有的系数都是相等的. 据此, 我们有

$$b_0 - b_1 x^2 + b_2 x^4 - \dots + (-1)^n b_n x^{2n} = b_0 \left(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}\right).$$

比较两边对应项 x^2 的系数得到 $b_1 = b_0 \left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \dots + \frac{1}{\beta_n^2}\right)$.

再考虑三角方程

$$\sin x = 0.$$

它有无穷多个相异根: $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$. 将 $\sin x$ 展开为级数, 两边同时除以 x 得到

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = 0. \quad (2)$$

显然, 该方程的根为: $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$.

尽管代数方程(1)有有限项, 代数方程(2)有无限项, 但他们有共同的结构. 为此, 通过考虑 x^2 项的系数, 欧拉得到

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots.$$

这就得到 $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

该推导过程给人感觉不是很严格, 可结果是正确的.

2. 改变问题的描述形式

对一些问题, 将其表述形式进行转换可以改变研究问题的角度, 并有可能借助新的研究工具打开一个新的研究渠道. 如非线性方程组问题

$$F(x) = 0$$

可以等价地转化为目标函数最优值为零的无约束优化问题

$$\min_{x \in R^n} \frac{1}{2} \|F(x)\|^2$$

这样, 我们可以利用最优化方法里的一些工具求解方程组问题. 20 世纪 50 年代由 Hestenes 和 Stiefel 联合创立的无约束优化问题的线性共轭梯度算法就是通过这种转化建立的. 还有, 线性代数里面的二次型 $x^T A x$ 可以借助矩阵的内积来表示: $\langle A, x x^T \rangle$. 或许, 我们觉得这些表述本质上是一样的, 奇怪的是在推导过程中这样做有时会产生质的差别.

3. 由特殊到一般——通过归纳推理建立结论

对于简单枚举推理结论的或然性, 华罗庚先生曾做过通俗的说明: 如果从一个袋子里摸出来的第一个是红玻璃球, 第二个是红玻璃球, 甚至第三个、第四个、第五个都是红玻璃球的时候, 我们立刻会出现一种猜想: “是不是这个袋子里的东西都是红玻璃球?” 当我们有一次摸出一个白玻璃球的时候, 这个猜想失败了. 这时, 我们会出现另一个猜想: “是不是袋里的东西都是玻璃球?” 当有一次摸出来的是一个木球的时候, 这个猜想又失败了. 那时又会出现第三个猜想: “是不是袋里的东西都是球?” 这个猜想对不对, 还必须继续加以检验, 只有把袋里的东西全部摸出来, 才能见分晓. 这是简单枚举推理的过程, 其可靠程度取决于所考察对象的范围及数量. 这种推理方式可以帮助我们通过个例建立新结论, 实现由特殊到一般的飞跃. 所以, 我们在进行数学研究时要善于捕捉那些偶然的现象.

4. 探求因果联系

俗话说: “无风不起浪.” 任何现象的出现都不可能没有原因. 所以, 因果联系具有确定性. 据此, 我们可以从某种结果探究其原因. 比如在对一些算法进行数值试验时, 若不时出现某种稀奇的结果, 这时我们就需要对算法、程序或对计算的问题进行细究, 找出原因. 因为数值试验有时会很可靠地显露出某些可能的理论结果.

5. 突破定势思维, 建立逆向思维

逆向思维也叫求异思维, 它是人们进行科学研究的一种非常重要的方法. 对一个问题, 人们往往根据它所属问题类的传统思路来考虑. 而逆向思维恰恰是反其道而行之, 从问题的相反面进行探索, 树立新思想, 建立新方法.

对无约束优化问题

$$\min_{x \in R^n} f(x)$$

传统的数值迭代算法是在每一迭代步, 先确定目标函数在当前迭代点 x_k 的一个下降方向 d_k , 然后沿该搜索方向前进直至得到一个使得目标函数值可得到某种程度的下降的新的迭代点 x_{k+1} . 显然, 该迭代过程保证目标函数值数列是单调下降的. 这种单调步长规则是优化算法中人们普遍接受和惯用的迭代格式. 然而, Grippo 等却突破迭代过程中目标函数值数列的单调性限制建立了一种非单调步长规则. 该规则使得在迭代过程中目标函数值数列的变化总趋势是下降的. 尽管乍看它不容易被理解和接受, 但数值试验表明该方法确实不错.

四、科研档次的提高

在提高自己的科研能力方面，王梓坤院士给我们提供的诀窍是：做学问一定先打破一个缺口，在一个方向上有自己的建树，建立自己所谓的“根据地”，然后通过扩大自己的知识面加强自己的主攻方向，扩大自己的根据地。具体策略是顺藤摸瓜，展开与自己研究领域相关的其他领域的研究，以实现专和博的统一。有时我们会从一个研究分支转到另一个研究分支，但这并不是把原来所搞分支丢掉跳到另一分支，而是在搞熟弄通的分支附近，扩大眼界，逐渐转到另一分支。这样，原来的知识在新的领域仍有有用武之地。这样做要求我们必须具有比较宽的知识面和扎实的基础。

五、做研究所需要的基本条件

做科学研究需要德、识、才、学、技五个要素。所谓“德”是指一个人的品德，它不但包括和别人相处过程中所表现出的谦虚、谨慎的优良品质，还包括在研究过程中所需要的实事求是，勤勤恳恳和脚踏实地的实干精神。“学”是指一个人的学问，也就是扎实的基础。“才”是指才干，也就是一个人利用所学知识解决实际问题的能力。“识”是指一个人敏感的觉察力和丰富的想象力。敏感的觉察力是指对问题一针见血的分析能力，这是发现问题和解决问题的关键。对一个问题，它值得不值得解决，如果要解决的话应从哪里入手，这是一个从事数学研究的人必须具备的能力。同时，一个人要想在科学上有所建树，就必须有丰富的想象能力，学会“大胆假设，小心求证”，培养跳跃性思维和发散性思维能力。“技”是技能。做数学研究不只需要数学知识，它还需要计算机、外语以及 Matlab 等工具。如果你在这方面技能不足，那很可能会影响你的发展。具体说来，做研究的必要条件是：

1. 有严谨的态度和正确的心态

现如今浮躁的心态和不健全的考核制度使很多刚进入数学研究的年轻人急于出成果，见效益。但一个真正想做研究的人，要想在学术界立住脚，他的工作必须令人信服，而这需要有成果来支撑。而别人一旦发觉你的某个成果站立不住，它的反面影响力远比你文章的正面影响力深远。所以，做数学研究一定要严谨，要尊重事实。我们都熟知陈景润为解决哥德巴赫猜想废寝忘食的故事。我们年轻一代人可能受不了这个苦。不过，我们还是要说：要想出成果，就得耐得住寂寞。一个浮躁的人是做不了研究的。

一个人要想做到严谨，他必须摆正心态，忌存侥幸心理。要知道任何发明创造和科研成果都不是偶然出现的。牛顿看见苹果从树上掉下来并非是他发现万有引力定律的真正原因，我们只能说这个现象启发了他。阿基米德发现浮力定律也是在他沉溺于浮力问题的思考中在他下游泳池的时候豁然开朗的。所以，科学上的灵感不是坐待可以得来的。如果说科学上的发现有什么偶然的机遇的话，那么这种“偶然的机遇”只能给那些有雄厚基础、善于独立思考且具有锲而不舍精神的人，而不会给懒汉。

2. 有扎实的基础和收集资料、分析资料的能力

一个人要想真正做研究，他一定要精读本学科一些优秀教材或现代的经典著作，使自己对该学科的基本知识和基本理论有一个全面、系统的了解，为自己的科学研究打下一个坚实的基础。这是研究生攀登这一门学科高峰的最好阶梯和捷径。

随着一个人研究工作的推进，他的基础会渐渐显露出来。讲到基础，凡是进行数学研究的人总会发问：基础要多厚才好？对此，很难界定一个具体的标准，我们的建议是若遇到自己所掌握的知识不足以支撑我们的研究需要时，最好能抽出一定的时间补一下自己的基础。

收集资料并进行分析是一个做数学研究的人必须具备的能力。一个进行数学研究的人只有通过对自己专业领域文献资料的搜集、阅读和分析，才能摸清自己从事的研究课题在国内外的研究现状、发展趋势及尚待解决的关键问题，进而诱发解决问题的新设想和新方案。

在这方面，一个不可忽视的因素是要善于动手，因为有些问题干想是想不出来的，必要的时候要静下心来，拿出纸和笔演算一下。

3. 善于动脑，保持思路清醒的头脑

独立思考是科学研究的根本。由于一切事物都在不断地发展着，昨天获得的成果，固然可以变成我们的知识财富，但当这些财富不能用来解决今天遇到的新问题的時候，我们就必须创造新方法，而这完全依赖于我们突破前人成规的独立思考能力。科学家和平常人的区别在于科学家善于观察和思考。遇到同一个现象，普通人看到之后是好奇，而科学家在好奇之余会试图把谜团解开。思考在科学研究中的作用不言而喻。

当然，独立思考也并不是说不要读书，不要看文献，不要听老师的讲述了。书本、文献、老师都是要的，牛顿的成功尚且归功于自己站在巨人的肩上，何况我们呢？关键是我们不要拘泥于这些。独立思考也不是说一个人独自在那里冥思苦想，不与他人交流。因为独立思考也要借助别人的结果和智慧。

搞科学研究的人，应该敢于破除迷信，解放思想，海阔天空地想。但科学上的美丽设想，只有和研究工作中的实事求是相结合，才有可能成为现实。在中国的古代小说和传说里面，有许多关于飞向太空的幻想。只有在距今百多年以前，俄国科学家齐奥科夫斯基才想到用火箭的办法“上天”，而在以后人们又经过了许多艰苦的努力，才解决了宇宙飞船上天等一系列问题，而将上天的美丽幻想化成了现实。在科学研究工作中，可贵的不仅在于敢于设想，而且要善于通过尝试，能够脚踏实地地把设想逐步变成现实。科学上的许多发现都是日积月累长期辛勤思考的结果。具体地，如果我们遇到一个难题，下面的方法可以帮助我们思考：

(1) 我似乎在什么地方碰到过类似的问题，不妨借助那里的方法试试。

(2) 这个问题太难了，太抽象了，我可否考虑将其分解成几个小问题，或分解成几个部分，然后由易到难一个个解决，最后串起来。也可以考虑这个问题的一些简单或特殊的情形。

(3) 尽可能构造一些例子来，从中找出一些规律：由具体到抽象，由特殊到一般。

(4) 如何发挥自己计算能力强的优势呢？先加一些条件，把这个问题的一个例子算一算，看看结果如何，最好能把结果直观地解释一下。

(5) 直观和猜想是科学发现中不可缺少的东西。这个问题的物理意义和几何意义是什么？这种发散性思维常常可以给我们引路，尽管有时是误导。

(6) 如果自己卡在某个小小的结论上，是否这个结论已经有了，是否应该查阅有关的参考书或咨询一下有关方面的专家和周围的同行？

(7) 某人的工作和自己的科研工作有点关系，我或许会从他那里得到点启示。

(8) 采用逆向思维方法解决问题。对遇到的难题，既然传统思维模式很难解决，我是否应转换角度寻找新的突破口？如可否将某个变量固定或将某个常数看做变量？

(9) 这个问题折腾了我好长时间，我现在要换根脑筋，到公园溜溜，和朋友诉说自己遇到的难处。要知道长时间紧张后短暂的放松有利于灵感的出现。

(10) 即使问题解决了，也要对所得到的结论采取客观态度，不能轻易相信自己的结论是正确的，要在头脑清醒的时候再三考虑一下：该结论与已有的结论和谐吗？有无反例？由它会得到荒谬的结果吗？有无更简单的证明？

4. 善于思考，善于联想，激发灵感

谈到灵感，很多人会想到美国发明家爱迪生的那句名言：“天才就是 99% 的汗水加 1% 的灵感”。这是不少人的座右铭，似乎只要“出大力，流大汗”就可以成才。可许多人并不

知道,爱迪生这句名言还有下半句:“但是,这1%的灵感恰恰是最重要的!有时要比那99%的汗水还要重要!”不管对于一个科学家,艺术家,还是对于一个普通人,汗水和灵感都是至关重要的.什么是灵感?灵感是创造性劳动过程中出现的“一闪念”的一种心理状态,它不但能由表及里,透过表面现象看本质,体现出高度的抽象概括能力和敏锐的洞察力,而且还能由此及彼体现出丰富的想象力和一定的创造性.古往今来,历史上的无数发明创造都离不开人的灵感.汗水产生量变,灵感产生质变.灵感并不是什么神秘的东西,而是经过长时间的思考 and 实践之后,思想处于高度集中和紧张时,对所考虑的问题已基本成熟但又没有彻底成熟,一旦受到某种启发时融会贯通时所产生的新思想.对于炭的化学结构,德国化学家凯库勒苦苦思索不得其解,但在乘车回家的路上他忽然毛塞顿开.这告诉我们,过久地考虑同一个问题会使我们陷入死胡同,白白地浪费精力和时间.与其这样,不如先把它放一放,休息一下或换一个角度思考,然后再转过头考虑原来的问题,并努力把它们串起来,这样有利于新思想的出现.

5. 必要的计算机和外语基础

在现今时代,计算机和外语在数学研究中的作用是不言而喻的.从资料搜索、理论结果的数值验证到数值方法的实现都离不开计算机,而从阅读文献到结果整理更离不开外语.所以,外语和计算机是进行数学研究不可缺少的两项技能.而一个好的理论结果如果配以强有力的数值算例和飘洒的英文无疑会给你的论文增添不少分量.

6. 经常参加一些学术活动

参加一些学术活动对我们有两方面的帮助:一是通过参加与自己专业研究方向相关的讲座,了解了本专业当前研究热点和未来发展趋势,也让自己有了一个明确的目标,并通过与专家交流获得其创新经历和科研体会,直接感受其创新过程,领悟其成功经验和创新内核.而且一旦碰到自己感兴趣的课题,就可以尝试与这方面的专家进行实质性交流.如果你就共同关心的课题有某些想法或已取得某些成果,那么与专家的交流会给你极大的帮助,这机会很可能成为你研究道路的一个转折点.二是参加一些自己感兴趣的、认为对自己有帮助的讲座.比如压力管理、机遇与挑战这种对人的心理和成长有帮助的讲座,这对个人的成长也很有帮助.

7. 善于与导师交流

与导师和周围的人之间建立和谐的关系相当重要.无论是研究生还是博士生一定要明白一个道理:学习主要靠自己,指导教师的作用是次要的.尽管如此,在学习期间,与指导教师经常交流还是十分重要的.研究生要从交流中向导师学习他们是如何思考问题的,如何进行数学研究的,如何撰写论文的,如何治学的等等.因此,判断师生之间关系是否融洽、培养是否收到成效、教师是否称职、学生是否努力的一个重要要素就是师生之间能否经常交流.要知道一个优良的导师有无数成功的经验和失败的教训,特别是后者,往往是在书本上找不到的——因为书本上仅仅记录了成功的创作,而很少记录下在发明之前无数次失败和无数次逐步推进的艰苦思索过程.而优良的导师正如航行的领航者一样,他可以告诉你哪儿有礁石,哪儿是航道,特别是在自己读了很多书或论文没有任何想法的时候.同时,研究生也一定要主动把自己的研究心得与进展、存在的问题和不成熟的想法告诉自己的指导教师.他也许会从你的见解、看法甚至一个思想火花得到启发,告诉你应该如何做下去.

在师生交流方面,丹麦哥本哈根学派的创始人、诺贝尔奖获得者尼尔斯·波耳和他的学生是一个范例.尼尔斯·波耳经常在一上班时就会告诉学生们他昨天思考的一些“想法”,

一说出来,发现其中十有八九是胡思乱想,或实现不了的.但他不怕学生们笑话他,这样学生们也敢于向他表达自己的想法.

应该指出,向指导教师请教,不要企求指导教师会帮助解答很具体的问题.文献中有许多问题,特别是公式,即使学术水平很高的指导教师也不一定能解答或立即推导出来.这些问题不应属于指导教师为你解答的范围,而应是自己设法弄清楚的.这也是大学生与研究生的一个差别.

8. 要虚心,善于与人合作

我们每个人都有自己擅长的地方也有自己的弱项.这要求我们在做研究时要学会搭配.比如,有的人数学功底很扎实,但不善于发现问题;而有的人很会提问题,可苦于基础差不能解答.如果这两类人合在一起,很可能产生 $1+1>2$ 的效果.进一步,与别人合作可以使自己得到更多的学习机会,得到更多的启发,也扩展了自己的研究领域.从这个意义上,我们要注意培养自己的合作意识和合作能力.

9. 重视点滴工作,从手头做起,循序渐进

科学之所以得有今日,并不是由于极少数的天才一步登天般地创造出来的,而是由于人类日积月累长期辛勤思考的结果.任何一个成功的科学工作,如果分析一下,都是由于不少步骤所组成的.由第一步看第二步,是容易的,较直觉的;由前一步看后一步,也莫不如此.但是,一连若干步贯穿起来,这便成为一件烦难而深入的工作了.所以,我们的着眼点应是从容易入手,逐步深入,一丝不苟地进入科学内核之中.对于任何一个问题的研究都不是一下子就能得到问题的正确答案.人们往往在一开始得到一个近似答案或近似解,然后一步步逼近正确答案.所以,当我们有想法的时候,就要马上动手把它整理出来,然后一步步扩充和改进.这样做的结果可能是到最后你整理出来的论文与起初的想法大相径庭,但不要就此小看起初的想法.

以上总结的内容不可能是数学研究方法策略的全部,但愿它能起到敲门砖的作用,带领更多的有志从事数学研究的年轻人尽快踏进数学研究之门.

致谢: 本文在整理过程中得到新加坡国立大学的孙捷教授、北京交通大学的修乃华教授和曲阜师范大学的刘立山教授许多有益的建议,对此深表感谢!

参考文献:

- [1] 华罗庚,华罗庚科普著作选集.上海教育出版社,1984.
- [2] 张尧庭,许宝禄思想方法,曲阜师范大学学报1993年,第1期.
- [3] 王梓坤,科学发现纵横谈.北京师范大学出版社,2006.
- [4] 周立伟,博学笃志,追求卓越——献给研究生的12条忠告与建议.《学位与研究生教育》2006年第3期.